Université de Bretagne sud
Département de Mathématiques, Informatique, Statistiques
Licence 3ème année
Calcul différentiel et séries de fonctions

Correction du contrôle continu no 9, du 5 mai 2015.

Exercice — Soient $a, T > 0$ et soit f une fonction T-périodique, intégrable sur $[0, T]$. On pose $S = T/a$ et $g(s) = f(as)$.

i) Montrer que g est S-périodique ;

ii) Calculer les coefficients de Fourier de g (en tant que fonction S-périodique) en fonction des coefficients de Fourier de f (en tant que fonction T-périodique).

Correction

i) La moitié d'entre vous s'est trompée dans la définition d'une fonction S-périodique... Il n'y a aucun piège là dedans, ne vous laissez pas attraper ! La fonction g est S-périodique si et seulement si $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$g(s + S) = g(s).$$

Rien de plus ni de moins. Ici, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g(s + S) = f\left(a(s + S)\right) = f\left(as + aS\right) = f\left(as + T\right).$$

Or la fonction f est T-périodique, ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$g(s + S) = f(as) = g(s).$$

Et g est bien S-périodique.

ii) Il s'agissait de réinvestir l'exercice 3 que l'on avait vu en classe et dont je vous avais donné la correction en plus par mail. On pouvait prendre les coefficients réels a_n et b_n mais dans ce cas il fallait faire le calcul pour les deux types de coefficients (ou dire « de même »). Sinon directement par les coefficients complexes, on écrit,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(g) = \frac{1}{S}\int_0^S g(s)\,\mathrm{e}^{-in\omega_g s}\,\mathrm{d}s.$$

J'attire votre attention sur la notation ω qui est ici malheureuse puisque ω dépend de la période : $\omega_g = \frac{2\pi}{S}$ tandis que $\omega_f = \frac{2\pi}{T}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(g) &= \frac{1}{S}\int_0^S g(s)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi}{S}s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} g(s)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi a}{T}s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{par définition, } S = \frac{T}{a} \\
&= \frac{a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} f(as)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi a}{T}s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{par définition de } g.
\end{aligned}$$

Et hop la formule magique est donc le changement de variable $t = as$. Dans ce cas les bornes vont de 0 à T, et $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{a}$. D'où,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(g) &= \frac{a}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi a}{T}\frac{t}{a}}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t \\
&= c_n(f).
\end{aligned}$$

Et voilà ! Je sais douze minutes c'est rapide, c'était un exercice vu rapidement à la fin du TD... mais il n'y avait vraiment aucune difficulté (à part le petit ω). Je compte sur vous pour refaire 20 fois cet exercice si nécessaire et vous verrez à la 20ième fois vous serez d'accord avec moi : mais oui c'est facile !